المستوى : ثالثة علوم تجريبية	الجمهورية الجزائرية الديمقراطية الشعبية وزارة التربية الوطنية مديرية التربية لولاية الأغواط ثانوية الشهيد محمّد بوسبسي	يوم : الاثنين 11 ماي 2015

 إلى

البكالوريا التجريبي في مادّة الرّياضيات

 من

على المترشح إختيار أحد الموضوعين

الموضوع الأول

التّمرين الأوّل (06 نقاط)

الفضاء منسوب إلى معلم متعامد و متجانس $(o,\vec{i},\vec{j},\vec{k})$.

نعتبر النقاط $A(3,2,6)$ $B(1,2,4)$ $c(4,-2,5)$

السّؤال 01	أ	أحسب الجداء السلمي $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}$	00.50
	ب	استنتج مساحة المثلث (ABC).	00.25
	ج	بين ان معادلة ديكارتية للمستوي (ABC) هي: $2x+y-2z+4=0$	00.75
نعتبر النقطة H المسقط العمودي للنقطة O على المستوي (ABC)			
السّؤال 02	أ	بين أنّ $H(\frac{-8}{9};\frac{-4}{9};\frac{8}{9})$.	01.50
	ب	احسب حجم رباعي الوجوه $OABC$.	00.50
(S) سطح الكرة التى مركزها O و تشمل النقطة A.			
السّؤال 03	أ	بين أن تقاطع (S) مع المستوي (ABC) هو الدائرة (C) التى مركزها H.	00.50
	ب	احسب طول نصف قطر الدائرة (C).	00.50
لتكن G مرجح الجملة $\{(O,3),(A,1),(B,1),(C,1)\}$			
السّؤال 04	أ	عين إحداثيات النقطة G	00.25
	ب	احسب بعد النقطة G عن المستوي (ABC)	00.25
(Γ) مجموعة النقط M من الفضاء حيث: $\left\Vert 3\overrightarrow{MO}+\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}\right\Vert=4$			
السّؤال 05	أ	بين أنّ (Γ) سطح كـرة يُطلب تعيين مركزها و نصف قطرها.	00.25
	ب	استنتج الوضع النسبي لـ: (Γ) و (ABC).	00.75

التّمرين الثّــاني (07نقــاط)

$P(Z)$ كثير حدود للمتغير المركب Z حيث: $P(Z) = Z^3 - 5Z^2 + 12Z - 8$

السّؤال01	أ	أحسب $P(1)$ و ماذا تستنتج؟	00.50
	ب	عيّن العددين الحقيقين a وَ b بحيث من أجل كل عدد مرّكب Z يكون: $P(Z) = (Z-1)(Z^2 + aZ + b)$	00.50
	ج	استنتج في $\mathbb{C}$ حلول المعادلة: $P(Z) = 0$	00.75

في المستوي المركب المنسوب الى معلم متعامد و متجانس $(O; \vec{u}; \vec{v})$

نعتبر النقط B, A وَ C التي لواحقها $z_C = 1;\ z_B = 2-2i;\ z_A = 2+2i$

السّؤال 02	أ	علم النقط B, A وَ C. و استنتج طبيعة المثلث ABC	00.75
	ب	أكتب z_A وَ z_B على الشكل الأسي .	00.50
	ج	استنتج أنّ: $\left(\frac{z_A}{z_B}\right)^{8n} + \left(\frac{z_B}{2\sqrt{2}}\right)^{8n} = 2$	00.75
السّؤال 03	أ	عين لاحقة D صورة B بالتحاكي h الذي مركزه C و نسبته -3	00.50
	ب	عين لاحقة E صورة B بالدوران r الذي مركزه O و زاويته $-\frac{\pi}{2}$	00.50

L عدد مركب معرف كما يلي : $L = \frac{z_D - z_A}{z_E - z_A}$

السّؤال 04	أ	أكتب L على الشكل الجبري	00.50
	ب	استنتج طبيعة المثلث ADE	00.50

I منتصف القطعة $[ED]$ و H نظيرة A بالنسبة الى I

السّؤال 05	أ	عين مع التبرير طبيعة الرباعي $ADHE$.	00.75
	ب	عين طبيعة (Ψ) للنقط M من المستوي حيث: $\left\lVert \overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MD} + \overrightarrow{MH} + \overrightarrow{ME} \right\rVert = 4\left\lVert \overrightarrow{MI} - \overrightarrow{MA} \right\rVert$	00.50

التّمرين الثّــالث (07 نقــاط)

			f دالة معرفة على $\mathbb{R}$ كمايلي : $f(x)=1-\frac{1}{2}x-\frac{2}{e^x+1}$ و (c_f) تمثيلها البياني في معلم المتعامد و المتجانس $(o,\vec{i},\vec{j})$	
الجزء الأوّل	السّؤال 01	أ	تــحقق أنّه من كل عدد حقيقي x , $\frac{1}{e^{-x}+1}=1-\frac{1}{e^x+1}$	00.25
		ب	استنتج أنّ f فــردية وفسّر النتيجة هندسيا.	01.00
		ج	أحسب نهاية الدالة f عند أطراف مجال التعريف.	00.50
	السّؤال 02	أ	بين أنّــه من أجل كل عدد حقيقي x من $\mathbb{R}$ لدينا : $f'(x)=\frac{-1}{2}\left(\frac{e^x-1}{e^x+1}\right)^2$	00.50
		ب	شكل جدول تغيّرات الدّالة f.	00.50
		ج	أحسب $f(0)$ ثم استنتج إشارة الدالة f على $\mathbb{R}$.	00.50
	السّؤال 03	أ	بين أن $(\Delta): y=\frac{-1}{2}x+1$ مستقيم مقارب مائل للمنحنى (c_f)	00.25
		ب	استنتج الوضعية النسبية للمنحنى (c_f) وَالمماس (Δ).	00.25
		ج	أنشئ (c_f) وَالمستقيم (Δ) في المعلم الــسابق ذِكـرُهُ	00.50
الجزء الثّالث	السّؤال 01	أ	تــحقق أنّــه من أجل كل عدد حقيقي x من $\mathbb{R}$ لدينا : $\frac{1}{1+e^x}=\frac{e^{-x}}{e^{-x}+1}$	00.25
		ب	استنتج أنــّه من أجل كل عدد حقيقي x من $\mathbb{R}$ لدينا : $\int_{-1}^{0}\frac{2}{1+e^x}dx=ln\left(\frac{e+1}{2}\right)^2$	00.50
		ج	أحسب مساحة الحــيّز المحدد بــ: • المنحنى (c_f). • $y=0$. • المستقيمين $x=-1$ وَ $x=0$.	01.00
الجزء الرّابع			g المعرفة على $\mathbb{R}$ كمايلي : $g(x)=\lvert f(x)\rvert$ وَ (c_g) تمثيلها البياني في المعلم السابق	
	السّؤال 01	أ	إشرح كيف يمكن إنشاء (c_g) انطلاقا من (c_f) . ثُمّ أنشئ (c_g) في نفس المعلم السابق .	01.00

الأستاذ زبرة يتمنى النّجاح للجميع

الموضوع الثّاني

التّمرين الأوّل (05 نقـــاط)			
(u_n) متتالية عددية معرفة على $\mathbb{N}$ كمايلي : $\begin{cases} u_0 = \dfrac{-5}{4} \\ u_{n+1} = (2+u_n)^2 - 2 \end{cases}$			
السّؤال 01	أ	برهن بالتراجع أنّه من أجل كل عدد طبيعي n: $-2 < u_n < -1$	01.00
	ب	أدرس إتجاه تغير المتتالية (u_n)	01.00
	ج	استنتج أنّ (u_n) متقاربة .	00.50
(v_n) متتالية عددية معرفة من أجل كل عدد طبيعي n كمايلي : $v_n = ln(u_n + 2)$			
السّؤال 02	أ	بين أنّ (v_n) هندسية يُطلب تعيين أساسها و حدّها الأوّل.	00.50
	ب	أكتب v_n بدلالة n ثُمّ استنتج u_n بدلالة n	00.50
	ج	أحسب بدلالة n المجموع S_n حيث: $S_n = v_0 + v_1 + v_2 + ... + v_n$	00.50
	د	أحسب بدلالة n الجداء π_n حيث: $\pi_n = (u_0+2)(u_1+2)(u_2+2)....(u_n+2)$	01.00

التمرين الثّاني (15 نقطة)

الجزء الأوّل

1ـ حل المعادلة التفاضلية التّالية: $y' - 2y = 0 ....(1)$

2ـ u دالة معرفة على $\mathbb{R}$ كمايلي: $u(x) = (ax+b)e^x$.

أـ عين العددين الحقيقين a وَ b حتى تكون u حل للمعادلة التفاضلية: $y' - 2y = xe^x .....(2)$

بـ بين أنّ v تكون حل للمعادلة (1) اذا و فقط اذا كان $u+v$ حل للمعادلة (2).

جـ استنتج جميع حلول المعادلة (2)

دـ عين الحل الخاص للمعادلة (2) الذي ينعدم من أجل 0

الجزء الثّاني :

لتكن الدّالة g المعرفة على $\mathbb{R}$ كما يلي : $g(x)=2e^{x}-x-2$

1. أحسب النهايات عند أطراف مجال التعريف.
2. أدرس تغيرات الدالة g ثمّ شكل جدول تغيراتها.
3. نقبل أنّ الدّالة g تقبل حلان.

أ- تحقق أنّ 0 هو أحد الحلول و استنتج أنّ α هو الحل الثاني حيث : $-1.6\le\alpha\le-1.5$

4. استنتج حسب قيم x اشارة $g(x)$.

الجزءالثّالث

f دالة معرفة على $\mathbb{R}$ كما يلي : $f(x)=e^{2x}-(x+1)e^{x}$

و (c_f) تمثيلها البياني في معلم المتعامد و المتجانس $(o,\vec{i},\vec{j})$

1. أحسب نهايات الدالة f عند أطراف مجال التعريف.
2. أحسب f' الدالة المشتقة للدالة f.

- استنتج أنّ إشارة f' هي من إشارة g.

3. أدرس تغيرات الدالة f ثمّ شكل جدول تغيراتها.
4. بين أنّ $f(\alpha)=-\frac{\alpha^{2}+2\alpha}{4}$ ثُمّ استنتج حصرا لـ: $f(\alpha)$.
5. أنشئ (c_f) في المعلم السابق ذِكْرُهُ.

الجزءالرّابع

m عدد حقيقي سالب

1. فسّر هندسيا التكامل I حيث : $I=\int_{m}^{0}f(x)dx$.
2. باستخدام التكامل بالتجزئة , أحسب $\int_{m}^{0}xe^{x}dx$.
3. أحسب عندئذ I.
4. أحسب نهاية I لـمّا يؤول m الى $-\infty$.

الأستاذ زبرة يتمنى النّجاح للجميع

بسم الله الرّحمن الرّحيم

التصحيح المفصل للبكالوريا التجريبي

المادّة : رياضيات

المستوى : ثالثة علوم تجريبية

الموضوع الأول

التمرين الأوّل

السّؤال 01

أـ حساب الجداء السلمي $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}$

$\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}1-3\\2-2\\4-6\end{pmatrix};\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}-2\\0\\-2\end{pmatrix}$ وَ $\overrightarrow{AC}\begin{pmatrix}4-3\\-2-2\\5-6\end{pmatrix};\overrightarrow{AC}\begin{pmatrix}1\\-4\\1\end{pmatrix}$

$$\boxed{\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}=\begin{pmatrix}-2\\0\\-2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\-4\\1\end{pmatrix}=0}$$

ب- استنتاج مساحة المثلث (ABC).

لتكن S مساحة المثلث (ABC).

$\dfrac{AB.AC}{2}=$ $\boxed{AB=\sqrt{(-2)^2+(0)^2+(-2)^2}=\sqrt{8}}$ وَ $\boxed{AC=\sqrt{(1)^2+(-4)^2+(1)^2}=\sqrt{18}}$

و منه : $S=\dfrac{\sqrt{18}.\sqrt{8}}{2}=\dfrac{3\sqrt{2}.2\sqrt{2}}{2}=6$

ج- بين ان معادلة ديكارتية للمستوي (ABC) هي: $2x+y-2z+4=0$

نعوّض إحداثيات النّقط A, B و C في المعادلة:

$A(3,2,6)$: $2(3)+(2)-2(6)+4=0$

$B(1,2,4)$: $2(1)+(2)-2(4)+4=0$

$C(4,-2,5)$: $2(4)+(-2)-2(5)+4=0$

لدينا:

النقطة H المسقط العمودي للنقطة O على المستوي (ABC)

السّؤال 02

أـ إثبات أنّ $H(\frac{-8}{9};\frac{-4}{9};\frac{8}{9})$.

- نكتب التمثيل الوسيطي للمستقيم (OH):

المستقيم (OH) يشمل النقطة O و شعاع توجيهه هو الشعاع الناظمي للمستوي (ABC):

إذن: $(OH):\begin{cases}x=0+2t\\y=0+t\\z=0-2t\end{cases}$ ....$(t\in\mathbb{R})$

النقطة H هي نقطة تقاطع المستقيم (OH) مع المستوي (ABC).

- نعوض الآن احداثيات التمثيل الوسيطي في معادلة (ABC)

$2(2t)+t-2(-2t)+4=0$ ومنه: $t=\frac{-4}{9}$

- الآن نعوض $t=\frac{-4}{9}$ في التمثيل الوسيطي للمستقيم (OH)

$$\begin{cases} x_H = 2(\frac{-4}{9}) \\ y_H = (\frac{-4}{9}) \\ z_H = -2(\frac{-4}{9}) \end{cases}$$

بعد التبسيط نجد $H(\frac{-8}{9};\frac{-4}{9};\frac{8}{9})$

ب- حساب حجم رباعي الوجوه $OABC$.

لدينا: عبارة الحجم هي : $V=\frac{1}{3}S.h$

حيث : S هي مساحة المثلث ABC و h هي الإرتفاع - الطول OH -

- من السؤال 01 - أ - لدينا $S=6$
- الآن نحسب الطول OH

$$OH=\sqrt{\left(\frac{-8}{9}-0\right)^2+\left(\frac{-4}{9}-0\right)^2+\left(\frac{8}{9}-0\right)^2}$$

$$OH=\sqrt{\left(\frac{64}{81}\right)+\left(\frac{16}{81}\right)+\left(\frac{64}{81}\right)}$$

$$OH=\sqrt{\frac{144}{81}}$$

$$OH=\frac{12}{9}=\frac{4}{3}$$

- مما سبق يمكن ان نحسب الحجم V

لدينا: $V=\frac{1}{3}S.h$

تـ ع : $V=\frac{1}{3}.6.\frac{4}{3}=\frac{24}{9}$

إذن: $V=\frac{8}{3}(uv)$

أ- إثبات أن تقاطع (S) مع المستوي (ABC) هو الدائرة (C) التي مركزها H .

- نقوم بحساب بُعد النقطة O عن المستوي ABC

$$d(O;(ABC))=\frac{|2x_o+y_o-2z_o+4|}{\sqrt{2^2+1^2+(-2)^2}}$$ و منه: $d(O;(ABC))=\frac{4}{3}$

- نحسب الآن نصف قطر سطح الكرة (S)

$$R=OA=\sqrt{3^2+2^2+6^2}=7$$

نلاحظ أنّ: $d(O;(ABC))<R$ و منه (S) يقطع (ABC) في دائرة.

هذه الدائرة مركزها المسقط العمودي للنقطة O على المستوي (ABC)

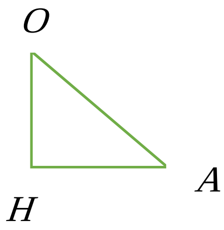
أي النقطة H

ب- حساب طول نصف قطر الدائرة (C):

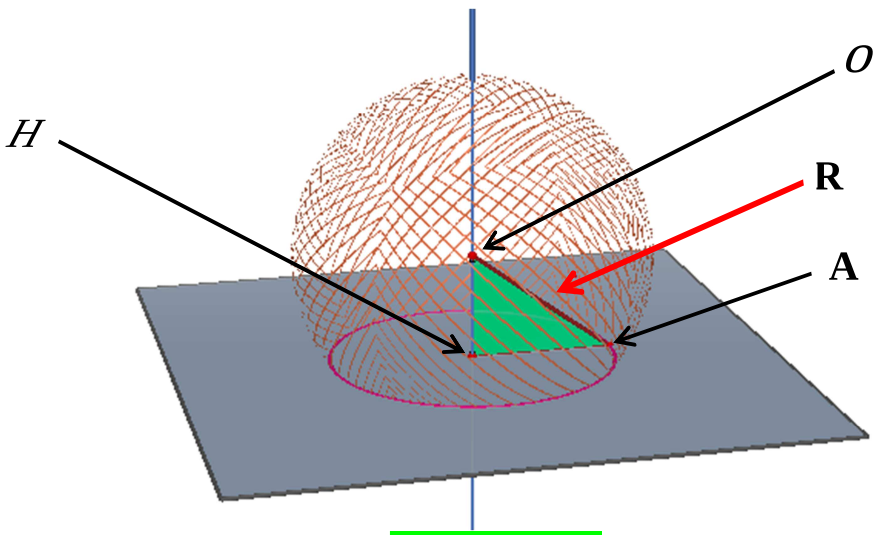
نصف قطر (C) هو الطول HA

$$AH=\sqrt{\left(\frac{-8}{9}-3\right)^2+\left(\frac{-4}{9}-2\right)^2+\left(\frac{8}{9}-6\right)^2}$$

بعد التبسيط نجد: $AH=\frac{5\sqrt{17}}{3}$



رسم توضيحي — فقط —



طريقة ثانية

لدينا:

$R=OA$

$r=AH$

$d\left(O;(ABC)\right)=OH$

$R^2=OH^2+OA^2$

و منه:

$R^2=OH^2+AH^2$

$AH=\sqrt{R^2-OH^2}$

$AH=\sqrt{49-\frac{16}{9}}$

$AH=\sqrt{\frac{425}{9}}=\frac{5\sqrt{17}}{3}$

لتكن G مرجح الجملة $\{(O,3),(A,1),(B,1),(C,1)\}$

أ ـ عين إحداثيات النقطة G

$$X_G=\frac{3x_O+x_A+x_B+x_C}{3+1+1+1}\qquad Y_G=\frac{3y_O+y_A+y_B+y_C}{3+1+1+1}\qquad Z_G=\frac{3z_O+z_A+z_B+z_C}{3+1+1+1}$$

ومنه

$$X_G=\frac{3(0)+(3)+(1)+(4)}{6}=\frac{8}{6}\qquad Y_G=\frac{3(0)+(2)+(2)+(-2)}{6}=\frac{2}{6}\qquad Z_G=\frac{3(0)+(6)+(4)+(5)}{6}=\frac{15}{6}$$

إذن $G\left(\frac{4}{3};\frac{1}{3};\frac{5}{2}\right)$

ب ـ حساب بعد النقطة G عن المستوي (ABC)

$$d(G,(ABC))=\frac{\left|2\left(\frac{4}{3}\right)+\left(\frac{1}{3}\right)-2\left(\frac{5}{2}\right)+4\right|}{\sqrt{(2)^2+(1)^2+(-2)^2}}$$

$$d(G,(ABC))=\frac{\left|\frac{8}{3}+\frac{1}{3}-5+4\right|}{\sqrt{(2)^2+(1)^2+(-2)^2}}=\frac{2}{3}$$

ومنه: $d(G,(ABC))=\frac{2}{3}$

لدينا:

(Γ) مجموعة النقط M من الفضاء حيث: $\left\|3\overrightarrow{MO}+\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}\right\|=4$

أ ـ إثبات أنّ (Γ) سطح كـرة يُطلب تعيين مركزها و نصف قطرها.

لدينا: G مرجح الجملة $\{(O,3),(A,1),(B,1),(C,1)\}$

ومنه: من أجل كل نقطة M من الفضاء

لدينا : $3\overrightarrow{MO}+\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}=(3+1+1+1)\overrightarrow{MG}$

$3\overrightarrow{MO}+\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}=6\overrightarrow{MG}$

ومنه : $\left\|3\overrightarrow{MO}+\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}\right\|=4$ تُكافئ $\left\|6\overrightarrow{MG}\right\|=4$ أي $6MG=4$

و منه : $\left\|3\overrightarrow{MO}+\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}\right\|=4$ تُكافئ $MG=\frac{2}{3}$

و منه: (Γ) سطح كـرة مركزها G و نصف قطرها $\frac{2}{3}$.

ب ـ استنتاج الوضع النسبي لـ: (Γ) و (ABC).

لدينا: بُعد النقطة G عن المستوي (ABC) هو: $\frac{2}{3}$ .... (1)

وَ : (Γ) سطح كُـرة مركزها G و نصف قطرها $\frac{2}{3}$ .... (2)

من (1) وَ (2) نستنتج أنّ: (ABC) مماس (Γ)

التمرين الثّاني

السؤال الأوّل:

$P(Z)$ كثير حدود للمتغير المركب Z حيث: $P(Z)=Z^3-5Z^2+12Z-8$

أ ـ حساب $P(1)$:

$$P(Z)=1^3-5(1)^2+12(1)-8=0$$

نستنتج أنّ 1 هو جذر لكثير الحدود $P(Z)$

تعيين العددين الحقيقين a وَ b بحيث من أجل كل عدد مرّكب Z

يكون: $P(Z)=(Z-1)(Z^2+aZ+b)$

لدينا: $P(Z)=(Z-1)(Z^2+aZ+b)$

و منه : $P(Z)=Z^3+aZ^2+bZ-Z^2-aZ-b$

أي: $P(Z)=Z^3+(a-1)Z+(b-a)Z-b$

لدينا $P(Z)=Z^3-5Z^2+12Z-8$ من جهة

وَ $P(Z)=Z^3+(a-1)Z+(b-a)Z-b$ من جهة أخرى

بالمقارنة نجد :

$$\begin{cases} a-1=-5 \\ -b=-8 \end{cases} \text{ و منه } \begin{cases} a-4 \\ b=8 \end{cases}$$

مـمّا سبق ينتج أنّ: $P(Z)=(Z-1)(Z^2-4Z+8)$

جـ استنتج في $\mathbb{C}$ حلول المعادلة: $P(Z)=0$

$P(Z)=0$ يعني أنّ $(Z-1)(Z^2-4Z+8)=0$

و منه : إمّـا $Z-1=0$ أو $Z^2-4Z+8=0$

لدينا : $Z-1=0$ و منه $Z_0=1$

وَ: $Z^2-4Z+8=0$ نستخدم المميز $\Delta=b^2-4ac$

و منه :

$$\Delta=4^2-4(1)(8)$$
$$\Delta=16-32$$
$$\Delta=-16$$
$$\Delta=(4i)^2$$
$$Z_1=\frac{4-4i}{2}$$
$$Z_1=\frac{4-4i}{2}=2-2i$$

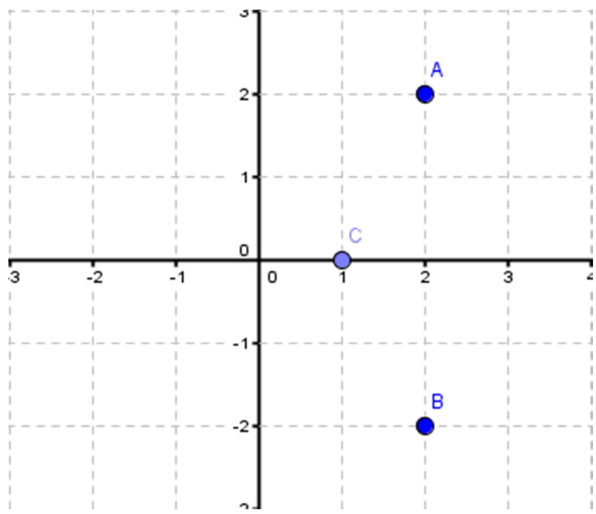
إذن:

حلول المعادلة هي

$$Z_0 = 1$$
$$Z_1 = 2 - 2i$$
$$Z_2 = 2 + 2i$$

السؤال الثاني

أ ـ تعليم النقط



استنتاج طبيعة المثلث ABC

المثلث ABC مساوي الساقين

الطريقة 01: (التناظر بالنسبة الى محور الفواصل)

الطريقة 02: حساب الأطوال

ب- كتابة z_A و z_B على الشكل الأسي :

لدينا: $z_B = 2-2i\ ;\ z_A = 2+2i$

$$Z_A = 2+2i$$
$$|Z_A| = \sqrt{(2)^2+(2)^2} = 2\sqrt{2}$$
$$arg\,(Z_A) : \begin{cases} \cos\theta_A = \dfrac{2}{2\sqrt{2}} = \dfrac{\sqrt{2}}{2} \\ \sin\theta_A = \dfrac{2}{2\sqrt{2}} = \dfrac{\sqrt{2}}{2} \end{cases}$$
$$arg\,(Z_A) = \frac{\pi}{4} + 2k\pi;\ ......(k\in\mathbb{Z})$$
$$Z_A = 2\sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{4}}$$

$$Z_B = 2-2i$$
$$|Z_B| = \sqrt{(2)^2+(-2)^2} = 2\sqrt{2}$$
$$arg\,(Z_B) : \begin{cases} \cos\theta_B = \dfrac{2}{2\sqrt{2}} = \dfrac{\sqrt{2}}{2} \\ \sin\theta_B = \dfrac{-2}{2\sqrt{2}} = \dfrac{-\sqrt{2}}{2} \end{cases}$$
$$arg\,(Z_B) = -\frac{\pi}{4} + 2k\pi;\ ......(k\in\mathbb{Z})$$
$$Z_B = 2\sqrt{2}e^{-i\frac{\pi}{4}}$$

ج- استنتاج أنّ: $\left(\dfrac{z_A}{z_B}\right)^{8n} + \left(\dfrac{z_B}{2\sqrt{2}}\right)^{8n} = 2$

لدينا:

$$\frac{z_A}{z_B} = \frac{2\sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{4}}}{2\sqrt{2}e^{-i\frac{\pi}{4}}} = e^{i\left(\frac{\pi}{4}+\frac{\pi}{4}\right)} = e^{i\left(\frac{\pi}{2}\right)}$$

و

$$\frac{z_B}{2\sqrt{2}} = \frac{2\sqrt{2}e^{-i\frac{\pi}{4}}}{2\sqrt{2}} = e^{-i\frac{\pi}{4}}$$

ومنه :

$$\left(\frac{z_A}{z_B}\right)^{8n} + \left(\frac{z_B}{2\sqrt{2}}\right)^{8n} = \left(e^{i\left(\frac{\pi}{2}\right)}\right)^{8n} + \left(e^{-i\left(\frac{\pi}{4}\right)}\right)^{8n}$$
$$\left(\frac{z_A}{z_B}\right)^{8n} + \left(\frac{z_B}{2\sqrt{2}}\right)^{8n} = \left(e^{i\left(\frac{8n\pi}{2}\right)}\right) + \left(e^{-i\left(\frac{8n\pi}{4}\right)}\right)$$
$$\left(\frac{z_A}{z_B}\right)^{8n} + \left(\frac{z_B}{2\sqrt{2}}\right)^{8n} = \left(e^{i(4n\pi)}\right) + \left(e^{-i(2n\pi)}\right)$$
$$\left(\frac{z_A}{z_B}\right)^{8n} + \left(\frac{z_B}{2\sqrt{2}}\right)^{8n} = \left(e^{i(2n\pi)}\right) + \left(e^{-i(2n\pi)}\right)$$
$$\left(\frac{z_A}{z_B}\right)^{8n} + \left(\frac{z_B}{2\sqrt{2}}\right)^{8n} = (1)+(1) = 2$$
$$\left(\frac{z_A}{z_B}\right)^{8n} + \left(\frac{z_B}{2\sqrt{2}}\right)^{8n} = 2$$

أ- تعيين لاحقة D صورة B بالتحاكي h الذي مركزه C و نسبته -3

تذكير

h تحاكي نسبته (-3) و مركزه C, عبارته المركبة هي :

$$(Z' - Z_w) = -3(Z - Z_w)$$

حيث M نقطة لاحقتها Z وَ M' نقطة لاحقتها Z'

w (مركز التحاكي h) نقطة لاحقتها Z_w

و نقول أيضا: Z' صورة Z بهذا التحاكي

إذن: D صورة B بالتحاكي h الذي مركزه C و نسبته -3

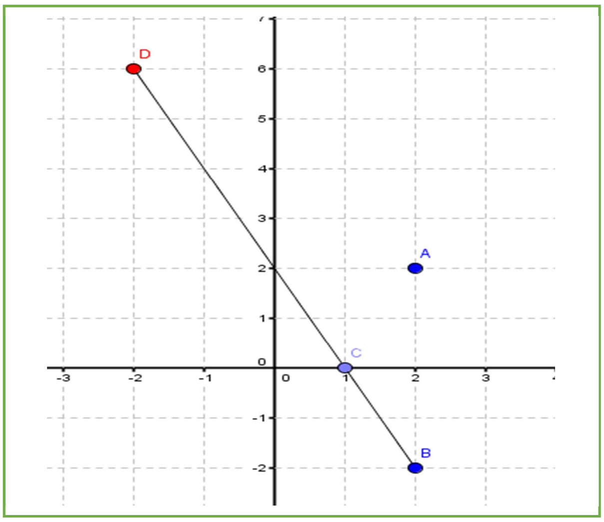
يعني:

$$(Z_D - Z_C) = -3(Z_B - Z_C)$$
$$Z_D = -3(Z_B - Z_C) + Z_C$$

تطبيق عددي:

$$Z_D = -3(2 - 2i - 1) + 1$$
$$Z_D = -3(1 - 2i) + 1$$
$$Z_D = -3 + 6i + 1$$
$$Z_D = -2 + 6i$$

و منه : $Z_D = -2 + 6i$



السؤال الثّالث

ب- تعيين لاحقة E صورة B بالدوران r الذي مركزه O و زاويته $-\frac{\pi}{2}$

تذكير

r دوران, زاويته $\left(-\frac{\pi}{2}\right)$ و مركزه w, عبارته المركبة هي :

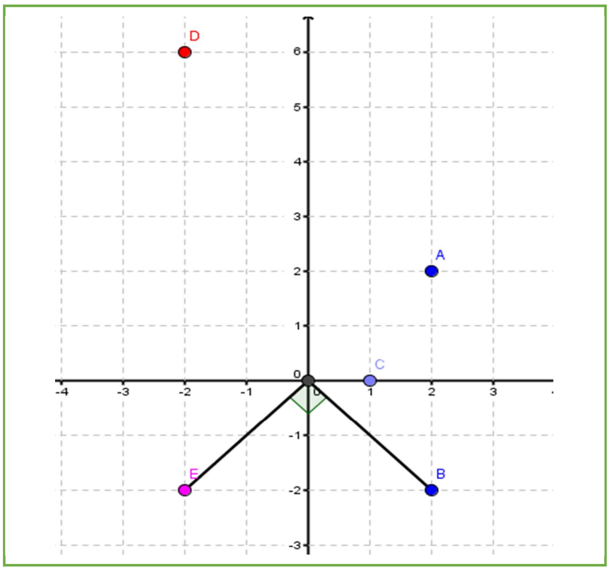
$$(Z' - Z_w) = -3(Z - Z_w)$$

حيث M نقطة لاحقتها Z وَ M' نقطة لاحقتها Z'

w (مركز الدوران r) نقطة لاحقتها Z_w

و نقول أيضا: Z' صورة Z بهذا التحاكي

إذن: E صورة B بالدوران r الذي مركزه O و زاويته $-\frac{\pi}{2}$



$$(Z_E - Z_O) = e^{-i\frac{\pi}{2}}(Z_B - Z_O)$$

يعني: $(Z_E) = e^{-i\frac{\pi}{2}}(Z_B)$

$$(Z_E) = -i\,(Z_B)$$

تطبيق عددي:

$$(Z_E) = -i\,(2-2i)$$

$$Z_E = -2i - 2$$

$$Z_E = -2-2i$$

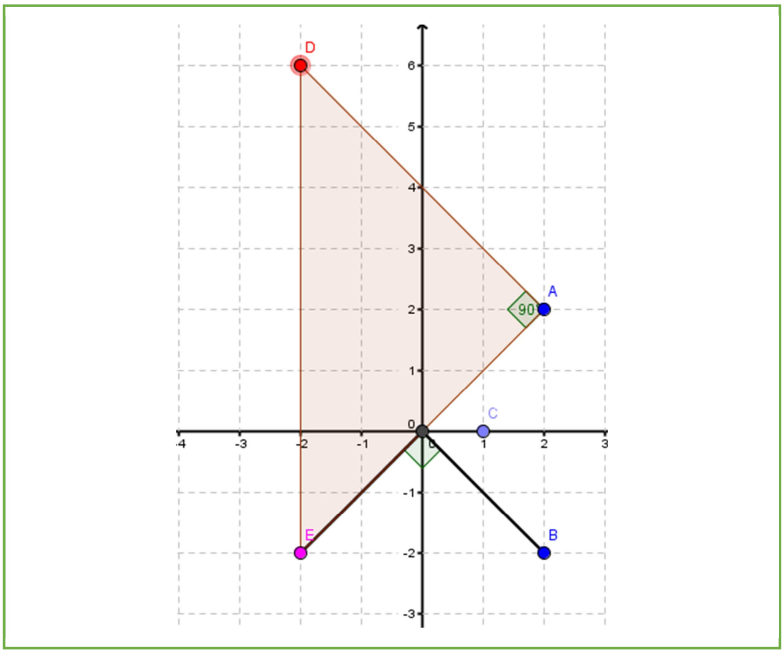
و منه: $Z_E = -2-2i$

السؤال الرّابع

أ- كتابة L على الشكل الجبري:

لدينا : L عدد مركب معرف كما يلي : $L = \frac{Z_D - Z_A}{Z_E - Z_A}$

و لدينا أيضا: $Z_E = -2-2i\,;\,Z_D = -2+6i\,;\,Z_A = 2+2i$



و منه :

$$L = \frac{(-2+6i)-(2+2i)}{(-2-2i)-(2+2i)}$$

$$L = \frac{-2+6i-2-2i}{-2-2i-2-2i}$$

$$L = \frac{-4+4i}{-4-4i}$$

$$L = \frac{(-4+4i)(-4+4i)}{(-4-4i)(-4+4i)}$$

$$L = \frac{16-16i-16i-16}{32}$$

$$L = \frac{-32i}{32} = -i$$

و منه: $L = -i$

ب ـ استنتاج طبيعة المثلث ADE

لدينا: $L=\frac{z_D-z_A}{z_E-z_A}$

$|L|=\left|\frac{z_D-z_A}{z_E-z_A}\right|$

و منه: $|L|=\frac{|z_D-z_A|}{|z_E-z_A|}=\frac{AD}{AE}.......(1)$ من (1) وَ(2) نستنتج $\frac{AD}{AE}=1$ أي $AD=AE$

$|L|=|-i|=1........(2)$

$arg(L)=arg\left(\frac{z_D-z_A}{z_E-z_A}\right)$

و لدينا أيضا: $arg(L)=arg(-i)$ من (3) نستنتج أنّ $(\overrightarrow{AD},\overrightarrow{AE})=-\frac{\pi}{2}$

$arg(L)=-\frac{\pi}{2};.....(3)$

مما سبق نستنتج أنّ: المثلث ADE قائم و متساوي الساقين

السؤال الخامس

أ ـ تعيين طبيعة الرباعي $ADHE$ مع التبرير

لدينا: I منتصف القطعة $[ED]$ و H نظيرة A بالنسبة الى I

1- I منتصف $[ED]$

2- H نظيرة A بالنسبة الى I يعني أنّ I منتصف $[AH]$

من 1و 2 نستنتج أنّ: $[AH]$ $[ED]$ متناصفان
ومنه
الرباعي $ADHE$ متوازي أضلاع

3- $AD=AE$

4- $(\overrightarrow{AD},\overrightarrow{AE})=-\frac{\pi}{2}$

حسب السؤال السابق
المثلث ADE قائم و مساوي الساقين

من 1, 2, 3 و 4 : نستنتج أنّ : الرباعي $ADHE$ مُـربع

ب ـ تعيين طبيعة المجموعة (Ψ) للنقط M من المستوي حيث:

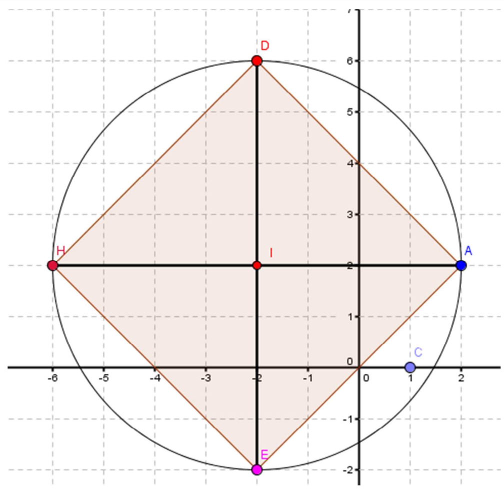
$\|\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MD}+\overrightarrow{MH}+\overrightarrow{ME}\|=4\|\overrightarrow{MI}-\overrightarrow{MA}\|$

النقطة I هي مركز ثقل المربع $ADHE$ ومنه $\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MD}+\overrightarrow{MH}+\overrightarrow{ME}=4\overrightarrow{MI}$

إذن: $\left\|\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MD}+\overrightarrow{MH}+\overrightarrow{ME}\right\|=4\left\|\overrightarrow{MI}-\overrightarrow{MA}\right\|$ تُكــافئ:

$$\begin{aligned}
&\left\|4\overrightarrow{MI}\right\|=4\left\|\overrightarrow{MI}-\overrightarrow{MA}\right\|\\
\Leftrightarrow &\left\|4\overrightarrow{MI}\right\|=4\left\|\overrightarrow{MI}+\overrightarrow{AM}\right\|\\
\Leftrightarrow &\left\|4\overrightarrow{MI}\right\|=4\left\|\overrightarrow{AM}+\overrightarrow{MI}\right\|\\
\Leftrightarrow &\left\|4\overrightarrow{MI}\right\|=4\left\|\overrightarrow{AI}\right\|\\
\Leftrightarrow &\ 4MI=4AI\\
\Leftrightarrow &\ MI=AI
\end{aligned}$$

و منه : طبيعة المجموعة هي الدّائرة (C) المحيطة بالمربع $ADHE$.



التمرين الثّالث

الجزء الأوّل:

لدينا :

f دالة معرفة على $\mathbb{R}$ كما يلي : $f(x)=1-\frac{1}{2}x-\frac{2}{e^x+1}$

و (c_f) تمثيلها البياني في معلم المتعامد و المتجانس $(o,\vec{i},\vec{j})$

السّؤال 01

أـ التـــحقق أنّــه من كل عدد حقيقي x , $\frac{1}{e^{-x}+1}=1-\frac{1}{e^x+1}$

$$\frac{1}{e^{-x}+1}=\frac{1}{e^{-x}\left(1+\frac{1}{e^{-x}}\right)}$$

$$\frac{1}{e^{-x}+1}=\frac{1}{e^{-x}\left(1+e^{x}\right)}$$

$$\frac{1}{e^{-x}+1}=\frac{1}{\frac{1}{e^{x}}\left(1+e^{x}\right)}$$

$$\frac{1}{e^{-x}+1}=\frac{1}{\frac{\left(1+e^{x}\right)}{e^{x}}}$$

$$\frac{1}{e^{-x}+1}=\frac{e^{x}}{1+e^{x}}$$

$$\frac{1}{e^{-x}+1}=\frac{e^{x}+1-1}{1+e^{x}}$$

$$\frac{1}{e^{-x}+1}=\frac{e^{x}+1}{1+e^{x}}-\frac{1}{1+e^{x}}$$

$$\frac{1}{e^{-x}+1}=1-\frac{1}{1+e^{x}}$$

ب- استنتاج أنّ f فـــردية وفسّر النتيجة هندسيا.

تذكير

f دالة عددية و D_f مجال تعريفها.
نقول أن f فردية
اذا كان لكل x من D_f ، $(-x)$ من D_f و $f(-x)=f(x)$

$$f(-x)=1-\frac{1}{2}(-x)-\frac{2}{e^{-x}+1}$$
$$f(-x)=-\frac{1}{2}(-x)+1-\frac{2}{e^{-x}+1}$$
$$f(-x)=-\frac{1}{2}(-x)+1-\frac{2}{e^{-x}+1}$$

من السؤال السابق لدينا:
$$\frac{1}{e^{-x}+1}=1-\frac{1}{e^{x}+1}$$

$$f(-x)=-\frac{1}{2}(-x)+1-2\left(1-\frac{1}{1+e^{x}}\right)$$
$$f(-x)=-\frac{1}{2}(-x)+1-2+\frac{2}{1+e^{x}}$$
$$f(-x)=\frac{1}{2}(x)-1+\frac{2}{1+e^{x}}$$
$$f(-x)=-1+\frac{1}{2}(x)+\frac{2}{1+e^{x}}$$
$$f(-x)=-\left(1-\frac{1}{2}x-\frac{2}{1+e^{x}}\right)$$
$$f(-x)=-f(x)$$

ج- حساب نهاية الدالة f عند أطراف مجال التعريف.

$$\lim_{x\to+\infty} f(x)=\lim_{x\to+\infty} 1-\frac{1}{2}x-\frac{2}{e^{x}+1}$$
$$\lim_{x\to+\infty} f(x)=-\infty$$

لأنّ
$$\lim_{x\to+\infty}\frac{2}{e^{x}+1}=0$$
وَ
$$\lim_{x\to+\infty} 1-\frac{1}{2}x=-\infty$$

$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = \lim_{x \to -\infty} 1 - \frac{1}{2}x - \frac{2}{e^x + 1}$$

$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = +\infty$$

السّؤال 02

أـ إثبات أنّه من أجل كل عدد حقيقي x من $\mathbb{R}$ لدينا :

$$f'(x) = \frac{-1}{2}\left(\frac{e^x - 1}{e^x + 1}\right)^2$$

لدينا:

$$f(x) = 1 - \frac{1}{2}x - \frac{2}{e^x + 1}$$

$$f'(x) = -\frac{1}{2} - \left(\frac{0(e^x + 1) - e^x(2)}{(e^x + 1)^2}\right)$$

$$f'(x) = -\frac{1}{2} - \left(\frac{-2e^x}{(e^x + 1)^2}\right)$$

$$f'(x) = -\frac{1}{2} + \frac{2e^x}{(e^x + 1)^2}$$

$$f'(x) = -\frac{(e^x + 1)^2}{2(e^x + 1)^2} + \frac{4e^x}{2(e^x + 1)^2}$$

$$f'(x) = \frac{-(e^x + 1)^2 + 4e^x}{2(e^x + 1)^2}$$

$$f'(x) = \frac{-e^{2x} - 2e^x - 1 + 4e^x}{2(e^x + 1)^2}$$

$$f'(x) = \frac{-e^{2x} + 2e^x - 1}{2(e^x + 1)^2}$$

$$f'(x) = \frac{-(e^{2x} - 2e^x + 1)}{2(e^x + 1)^2}$$

$$f'(x) = \frac{-(e^x - 1)^2}{2(e^x + 1)^2}$$

$$f'(x) = \frac{-1}{2}\left(\frac{e^x - 1}{e^x + 1}\right)^2$$

نلاحظ أنّ: $f'(x) \le 0$

f': تنعدم عند 0 و لاتُغير إشارتها

نستنتج أنّ النقطة **(0 ;f(0))** هي نقطة إنعطاف لــ: (c_f)

ب- جدول تغيّرات الدّالة f.

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$-$	
$f(x)$	$+\infty$	↘			$-\infty$

ج- حساب $f(0)$:

لدينا : $f(x) = 1 - \frac{1}{2}x - \frac{2}{e^x+1}$

و منه: $f(0) = 1 - \frac{1}{2}(0) - \frac{2}{e^0+1}$ نــــــجد: $f(0) = 0$

استنتاج إشارة الدالة f على $\mathbb{R}$.

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$f(x)$		$+$	0	$-$	

السّؤال 03

أ- إثبات أنّ المستقيم $(\Delta): y = \frac{-1}{2}x + 1$ مستقيم مقارب مائل لــ: (c_f)

إذا كان : $\lim_{x \to +\infty} f(x) - \left(1 - \frac{1}{2}x\right) = 0$ أو $\lim_{x \to -\infty} f(x) - \left(1 - \frac{1}{2}x\right) = 0$

فإنّ: $(\Delta): y = \frac{-1}{2}x + 1$ مستقيم مقارب مائل لــ: (c_f) بجوار $+\infty$ أو $-\infty$ على الترتيب

لدينا: $f(x) = 1 - \frac{1}{2}x - \frac{2}{e^x+1}$

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) - \left(1 - \frac{1}{2}x\right) = \lim_{x \to +\infty} 1 - \frac{1}{2}x - \frac{2}{e^x+1} - \left(1 - \frac{1}{2}x\right)$$

و منه:

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) - \left(1 - \frac{1}{2}x\right) = \lim_{x \to +\infty} -\frac{2}{e^x+1}$$

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) - \left(1 - \frac{1}{2}x\right) = \mathbf{0}$$

نستنتج أنّ : $(\Delta): y = \frac{-1}{2}x + 1$ مستقيم مقارب مائل لــ: (c_f) بجوار : $+\infty$

ب- استنتاج الوضعية النسبية للمنحنى (c_f) وَ المماس: (Δ).

ندرس إشارة الفرق: $f(x)-y$

لدينا: $f(x)-y=1-\frac{1}{2}x-\frac{2}{e^x+1}-\left(1-\frac{1}{2}x\right)$

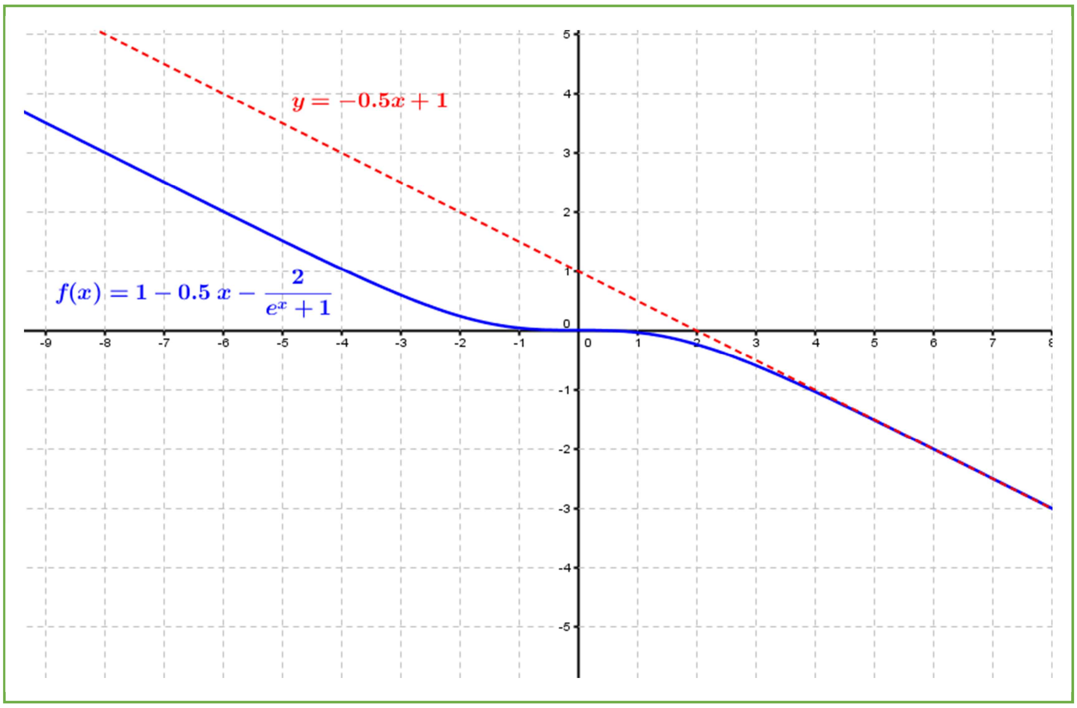
$$\lim_{x\to+\infty} f(x)-\left(1-\frac{1}{2}x\right)=-\frac{2}{e^x+1}$$

و بما أنّ: $-\frac{2}{e^x+1}$ لأنّ: $2>0$ وَ $e^x+1>0$

فإنّ: $f(x)-y<0$

نستنتج أنّ: (c_f) يقع تحت (Δ)

ج- إنشاء (c_f) وَ المستقيم (Δ)



الجزء الثّـاني :

السّؤال 01

أ ـ تـحقق أنّـه من أجل كل عدد حقيقي x من $\mathbb{R}$ لدينا: $\frac{1}{1+e^x}=\frac{e^{-x}}{e^{-x}+1}$

لدينا:

$$\frac{e^{-x}}{e^{-x}+1}=\frac{\frac{1}{e^x}}{\frac{1}{e^x}+1}$$

$$\frac{e^{-x}}{e^{-x}+1}=\frac{\frac{1}{e^x}}{\frac{1+e^x}{e^x}}$$

$$\frac{e^{-x}}{e^{-x}+1}=\frac{1}{1+e^x}$$

و هو المطلوب

ب ـ استنتاج أنّـه من أجل كل عدد حقيقي x من $\mathbb{R}$ لدينا : $\int_{-1}^{0}\frac{2}{1+e^x}dx=\ln\left(\frac{e+1}{2}\right)^2$

لدينا: حسب ما سبق: $\frac{e^{-x}}{e^{-x}+1}=\frac{1}{1+e^x}$ و منه: $\frac{2e^{-x}}{e^{-x}+1}=\frac{2}{1+e^x}$

الشرح بالتفصيل

$$\frac{e^{-x}}{e^{-x}+1}=\frac{1}{1+e^{x}}$$ حسب ما سبق

$$\int_{-1}^{0}\frac{1}{1+e^{x}}dx=\int_{-1}^{0}\frac{e^{-x}}{e^{-x}+1}dx$$

$$\int_{-1}^{0}\frac{2}{1+e^{x}}dx=\int_{-1}^{0}\frac{2e^{-x}}{e^{-x}+1}dx$$ بالضرب في 2

$$\int_{-1}^{0}\frac{2}{1+e^{x}}dx=2\int_{-1}^{0}\frac{e^{-x}}{e^{-x}+1}dx$$ نُخرج 2 من الجهة الثانية للمساواة

$$\int_{-1}^{0}\frac{2}{1+e^{x}}dx=-2\int_{-1}^{0}\frac{-e^{-x}}{e^{-x}+1}dx$$ نُخرج "-" عامل مشترك من الطرف الثاني

$$\int_{-1}^{0}\frac{2}{1+e^{x}}dx=-2\int_{-1}^{0}\frac{u'(x)}{u(x)}dx=-2\left[ln|u|\right]_{-1}^{0}$$

$$\int_{-1}^{0}\frac{2}{1+e^{x}}dx=-2\left[ln\left|e^{-x}+1\right|\right]_{-1}^{0}$$

$$\int_{-1}^{0}\frac{2}{1+e^{x}}dx=-2\left[ln(e^{-x}+1)\right]_{-1}^{0}$$ حذفنا القيمة المُطلقة لأنّ: $(e^{-x}+1)>0$

$$\int_{-1}^{0}\frac{2}{1+e^{x}}dx=-2\left[ln(e^{0}+1)-ln(e^{-(-1)}+1)\right]$$

$$\int_{-1}^{0}\frac{2}{1+e^{x}}dx=-2\left[ln(e^{0}+1)-ln(e^{-(-1)}+1)\right]$$

$$\int_{-1}^{0}\frac{2}{1+e^{x}}dx=-2\left[ln(2)-ln(e+1)\right]$$

$$\int_{-1}^{0}\frac{2}{1+e^{x}}dx=-2\left[ln\left(\frac{2}{e+1}\right)\right]$$ $ln(a-b)=ln\left(\frac{a}{b}\right)$ $(a>0)\wedge(b>0)$

$$\int_{-1}^{0}\frac{2}{1+e^{x}}dx=2\left[ln\left(\frac{e+1}{2}\right)\right]$$ $ln\left(\frac{a}{b}\right)=-ln\left(\frac{b}{a}\right)$ $(ab>0)$

$$\int_{-1}^{0}\frac{2}{1+e^{x}}dx=ln\left(\frac{e+1}{2}\right)^{2}$$ $ln(a)^{2}=2\,ln|a|$ $(a\neq 0)$

ج- أحسب مساحة الحـيّز المحدد بـــ:

- المنحنى (c_f).
- $y = 0$.
- المستقيمين $x = -1$ و $x = 0$.

ليكن I مساحة الحيّز المُـراد حسابه.

$$I = \int_{-1}^{0} f(x)\,dx$$

$$I = \int_{-1}^{0}\left(1-\frac{1}{2}x-\frac{2}{e^{x}+1}\right)dx$$

$$I = \int_{-1}^{0}(1)\,dx - \int_{-1}^{0}\left(\frac{1}{2}x\right)dx - \int_{-1}^{0}\left(\frac{2}{e^{x}+1}\right)dx$$

$$I = [x]_{-1}^{0} - \left[\frac{1}{2}x^{2}\right]_{-1}^{0} - ln\left(\frac{e+1}{2}\right)^{2}$$

$$I = [0-(-1)]_{-1}^{0} - \left[\frac{1}{2}(0)^{2}-\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}\right)^{2}\right]_{-1}^{0} - ln\left(\frac{e+1}{2}\right)^{2}$$

$$I = \frac{4}{4}+\frac{1}{4} - ln\left(\frac{e+1}{2}\right)^{2}$$

$$I = \frac{5}{4} - ln\left(\frac{e+1}{2}\right)^{2}$$

$$I = \frac{5}{4} - ln\left(\frac{e+1}{2}\right)^{2}\ (u.a)$$

الجزء الثالث

لدينا: g المعرفة على $\mathbb{R}$ كمايلي: $g(x)=|f(x)|$ و (c_g) تمثيلها البياني في المعلم السابق

السّؤال 01

شرح كيف يمكن إنشاء (c_g) انطلاقا من (c_f).

- نكتب $g(x)$ دون رمز القيمة المطلقة.

$$g(x)=f(x)............f(x)>0$$
$$g(x)=-f(x)............f(x)<0$$

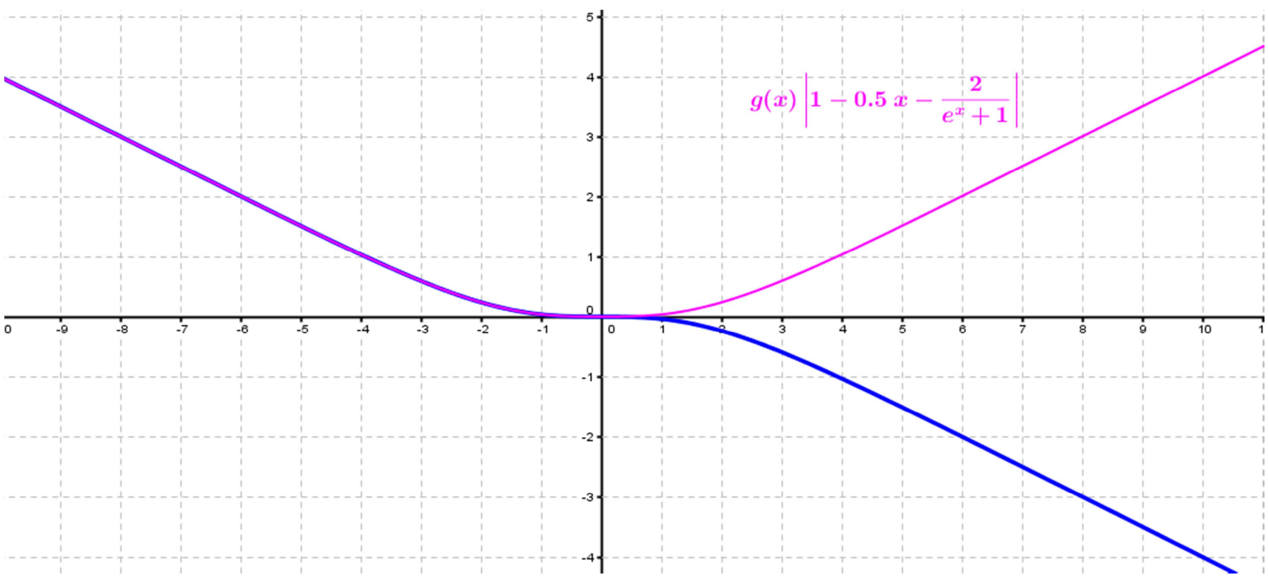
نستنتج أنّ:

(c_g) ينطبق على (c_f) إذا كــــان: $f(x)>0$ (***فوق محور الفواصل*** (c_f)).

(c_g) نظـــير (c_f) بالنسبة إلى محور الفواصل إذا كان: $f(x)>0$ (***تحت محور الفواصل*** (c_f)).

- إنشاء (c_g) في نفس المعلم السابق .

ملاحظة: نُعيد الرّسم للتوضيح فقط:



إنتهى بحمد الله و فضله
تصحيح البكالوريا التجريبي –الموضوع الأوّل –في مـــــادّة: الرّياضيات
لسنوات الثّالثة علوم تجريبيـة بثانوية: الشّهيد مُحَمّد بوسبسي بالأغواط
راجين من المولى عزّ و جلّ أن يجعل ثوابه في ميزان حسنات الوالدين
آمين

الموضوع الثاني

التمرين الأوّل

لدينا:

(u_n) متتالية عددية معرفة على $\mathbb{N}$ كمايلي :

$$\begin{cases} u_0 = \dfrac{-5}{4} \\ u_{n+1} = (2+u_n)^2 - 2 \end{cases}$$

السّؤال 01

أ- البرهان بالتراجع أنّه من أجل كل عدد طبيعي n: $-2 < u_n < -1$

1- التحقق : من أجل $n = 0$

لدينا : $-2 < u_0 = \dfrac{-5}{4} < -1$ إذن الخاصية مُحققة

2- الفرضية : نفرض أنّ الخاصية صحيحة من اجل n أي: $-2 < u_n < -1$

و نبرهن صحتها من أجل $n+1$ أي: $-2 < u_{n+1} < -1$

لدينا حسب الفرضية : $-2 < u_n < -1$

$$-2 < u_n < -1$$

نُظيف 2 الى الأطراف

$$2-2 < 2+u_n < 2-1$$

$$0 < 2+u_n < 1$$

بالتربيع نجد

$$0 < (2+u_n)^2 < 1$$

$$0-2 < (2+u_n)^2 - 2 < 1-2$$

نُظيف (-2) الى الأطراف

$$-2 < \underbrace{(2+u_n)^2 - 2}_{u_{n+1}} < -1$$

ومنــــــــــــــه: $-2 < u_{n+1} < -1$

3- الإستنتاج: نستنتج أنّ الفرضية صحيحة من اجل n أي: $-2 < u_n < -1$

ب- دراسة إتجاه تغير المتتالية (u_n)

ندرس إشارة الفرق: $u_{n+1}-u_n$

لدينا : $u_{n+1}=(2+u_n)^2-2$

و منه:

$$u_{n+1}-u_n=(2+u_n)^2-2-u_n$$
$$u_{n+1}-u_n=4+4u_n+u_n^2-2-u_n$$
$$u_{n+1}-u_n=2+3u_n+u_n^2$$
$$u_{n+1}-u_n=u_n^2+3u_n+2$$
$$u_{n+1}-u_n=(u_n+2)(u_n+1)$$

حسب السؤال السابق لدينا: $-2<u_n<-1$

$u_n<-1$	$-2<u_n$ أي $u_n>-2$
و منه:	و منه:
$u_n+1<0$	$u_n+2>0$

نستنتج أنّ: $u_{n+1}-u_n<0$ و منه: (u_n) متناقصة

ج- استنتاج أنّ (u_n) متقاربة:

بما أنّ متناقصة و محدودة من الأسفل فهي مُتقاربة

لدينا:

(v_n) متتالية عددية معرفة من أجل كل عدد طبيعي n كما يلي :

$$v_n=ln(u_n+2)$$

السّؤال 02

أ- إثبات أنّ (v_n) هندسية و تعيين حدّها الأوّل:

لإثبات أنّ (v_n) هندسية نُثبت أنّ $v_{n+1}=v_n.q$

لدينا:

$$v_n = ln(u_n+2)$$
$$v_{n+1} = ln(u_{n+1}+2)$$
$$v_{n+1} = ln\left((2+u_n)^2 - 2 + 2\right)$$
$$v_{n+1} = ln(2+u_n)^2$$
$$v_{n+1} = 2\,ln(2+u_n)$$
$$v_{n+1} = 2.v_n$$

$$ln\, a^n = n\, ln\, a$$

و منه (v_n) متتالية هندسية أساسها $q=2$

حدها الأوّل
$$v_0 = ln(u_0+2)^2$$
$$v_0 = ln\left(\frac{-5}{4}+2\right)$$
$$v_0 = ln\left(\frac{3}{4}\right)$$

ب- أكتب v_n بدلالة n ثمّ استنتاج u_n بدلالة n

- الحد العام لمتتالية هندسية حدّها الأوّل v_0 و أساسها q هو: $v_n = v_0 q^n$

إذن: $v_n = ln\left(\frac{3}{4}\right)(2)^n$

- لدينا: $v_n = ln(u_n+2)$ و منه $e^{v_n} = e^{ln(u_n+2)}$ أي $e^{v_n} = u_n + 2$

و منه: $u_n = e^{v_n} - 2$

بتعويض قيمة v_n نجد: $u_n = ln\left(\frac{3}{4}\right)(2)^n - 2$

ج- حساب بدلالة n المجموع S_n حيث: $S_n = v_0 + v_1 + v_2 + ... + v_n$

لدينا: مجموع متتالية هندسية حدّها الأوّل v_0 و أساسها هو:

$$v_0 + v_1 + v_2 + ... + v_n = v_0 . \frac{1-q^{n+1}}{1-q}$$

إذن:

$$S_n = ln\left(\frac{3}{4}\right).\frac{1-2^{n+1}}{1-2}$$

$$S_n = ln\left(\frac{3}{4}\right).\frac{1-2^{n+1}}{-1}$$

$$S_n = -ln\left(\frac{3}{4}\right).\left(1-2^{n+1}\right)$$

$$S_n = ln\left(\frac{4}{3}\right).\left(1-2^{n+1}\right)$$

$$-ln\left(\frac{a}{b}\right) = ln\left(\frac{1}{\frac{a}{b}}\right) = ln\left(\frac{a}{b}\right)$$

د- أحسب بدلالة n الجداء π_n حيث:

$$\pi_n = \left(e^{v_0}-2+2\right)\left(e^{v_1}-2+2\right)\left(e^{v_2}-2+2\right)....\left(e^{v_n}-2+2\right)$$

$$\pi_n = \left(e^{v_0}\right)\left(e^{v_1}\right)\left(e^{v_2}\right)....\left(e^{v_n}\right)$$

$$\pi_n = e^{v_0}e^{v_1}e^{v_2}......e^{v_n}$$

$$\pi_n = e^{v_0+v_1+v_2........+v_n}$$

$$\pi_n = e^{S_n}$$

$$\pi_n = e^{n\left(\frac{4}{3}\right).\left(1-2^{n+1}\right)}$$

إذن:

$$\pi_n = e^{n\left(\frac{4}{3}\right).\left(1-2^{n+1}\right)}$$

التمرين الثّاني

السّؤال 01

أ- حل المعادلة التفاضلية: $y'-2y=0.......(1)$

لدينا: $y'-2y=0$ و منه: $y'=2y$ هــــــــــــــــي من الشكل: $y'=ay\ ;.......(a\in\mathbb{R}^*)$

حلول المعادلة $y'-2y=0$ هـي الدّوال: $x\mapsto ke^{2x}$ حيث k عدد حقيقـي كيفي.

السّؤال 02

أ- عين العددين الحقيقين a و b حتى تكون u حل للمعادلة التفاضلية: $y'-2y=xe^x.....(2)$

لدينا: u دالة معرفة على $\mathbb{R}$ كما يلي: $u(x)=(ax+b)e^x$.

u حل للمعادلة التفاضلية: $y'-2y=xe^x.....(2)$ يعني أنّ: $u'-2u=xe^x$

$u(x)=(ax+b)e^x$. و منه: $u'(x)=ae^x+e^x(ax+b)$

$u'-2u=xe^x$ تكافئ $ae^x+e^x(ax+b)-2(ax+b)e^x=xe^x$

و مــــــــــنه: $ae^x-(ax+b)e^x=xe^x$

بالنشـــــر نجـــــد: $ae^x-axe^x-be^x=xe^x$

ومـــــــــنه: $-axe^x+e^x(a-b)=xe^x$

بالمقارنة نجد: $(-a=1)$ و $(a-b=0)$

و منه: $(a=-1)$ و $(b=-1)$

إذن:
u حل للمعادلة التفاضلية: $y'-2y=xe^x$ إذا و فقط إذا كانت: $u(x)=(-x-1)e^x$.

ب- إثبات أنّ v حل للمعادلة (1) اذا و فقط اذا كان v+u حل للمعادلة (2).

v+u: حل للمعادلة (2). يعــــــــني: $(u+v)'-2(u+v)=xe^x$

و منه: $u'+v'-2u-2v=xe^x$

و بما أنّ u حل للمعادلة (2) فإنّ: $v'-2v=0$

و منه: v حل للمعادلة (1) اذا و فقط اذا كان v+u حل للمعادلة (2).

ج- استنتاج جميع حلول المعادلة (2):

نضع : $f(x)=u+v$ و منه مجموعة حلول المعادلة (2) هي الدوال:

$$f(x)=(-x-1)e^{x}+ke^{2x};.......(k\in\mathbb{R})$$

د- تعيين الحل الخاص للمعادلة (2) الذي ينعدم من أجل 0:

لدينا: $f(0)=0$ تكافئ: $(-0-1)e^{0}+ke^{0}=0$

تكافئ: $-1+k=0$ أي $k=1$

إذن: الحل الخاص للمعادلة (2) الذي ينعدم من أجل 0 هو: $f(x)=(-x-1)e^{x}+e^{2x}$

الجزء الثّـاني:

لدينا: الدّالة g المعرفة على $\mathbb{R}$ كمايلي: $g(x)=2e^{x}-x-2$

السّؤال 01

أ- حساب النهايات عند أطراف مجال التعريف.

$$\lim_{x\to+\infty} g(x)=\lim_{x\to+\infty} 2e^{x}-x-2$$
$$\lim_{x\to+\infty} g(x)=\lim_{x\to+\infty} 2e^{x}$$
$$\lim_{x\to+\infty} g(x)=+\infty$$

$$\lim_{x\to-\infty} g(x)=\lim_{x\to-\infty} 2e^{x}-x-2$$
$$\lim_{x\to-\infty} g(x)=\lim_{x\to-\infty} -x-2$$
$$\lim_{x\to-\infty} g(x)=+\infty$$

ب- دراسة تغيرات الدالة g

- المشتقـــــــــة: $g'(x)=2e^{x}-1$
- إشارة المشتقة:

$$g'(x)=0\Leftrightarrow 2e^{x}-1=0$$
$$g'(x)=0\Leftrightarrow 2e^{x}=1$$
$$g'(x)=0\Leftrightarrow e^{x}=\frac{1}{2}$$
$$g'(x)=0\Leftrightarrow x=\ln\left(\frac{1}{2}\right)$$
$$g'(x)=0\Leftrightarrow x=-\ln 2$$

- جدول التغيرات:

x	$-\infty$		$-ln2$		$+\infty$
$g'(x)$		$-$	0	$+$	
$g(x)$	$+\infty$	$\searrow$	$g(-ln2)$	$\nearrow$	$+\infty$

$$g(-ln\,2)=2e^{-ln\,2}-(-ln\,2)-2$$
$$g(-ln\,2)=2e^{ln\frac{1}{2}}+ln\,2-2$$
$$g(-ln\,2)=2\left(\frac{1}{2}\right)+ln\,2-2$$
$$g(-ln\,2)=1+ln\,2-2$$
$$g(-ln\,2)=-1+ln\,2=-0.31$$

نقبل أنّ الدّالة g تقبل حلان

- التحقق أنّ 0 هو أحد الحلول:

$$g(0)=2e^{0}-(0)-2$$
$$g(0)=2-2=0$$

و منه : $g(0)=0$

- استنتاج أنّ α هو الحل الثاني حيث : $-1.6\le\alpha\le-1.5$

لدينا : الدالة g مستمرة و رتيبة على المجال $]-\infty;-\ln 2[$ و بالتالي على $]-1.5;-1.6[$

و لدينا أيضا : $g(-1.5)=-0.05374$ و $g(-1.6)=0.00379$ أي : $g(-1.5)\times g(-1.6)<0$

إذن : حسب نظرية القيّم المتوسطة فإنّ $g(x)=0$ تقبل حلاّ وحيدا α حيث : $-1.6\le\alpha\le-1.5$

يُحقق: $g(\alpha)=0$

ب- إشارة $g(x)$ حسب قيم x.

x	$-\infty$		α		0		$+\infty$
$g(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	

الجزء الثّـالث:

لدينا: f دالة معرفة على $\mathbb{R}$ كمايلي : $f(x)=e^{2x}-(x+1)e^{x}$

و (c_f) تمثيلها البياني في معلم المتعامد و المتجانس $(o,\vec{i},\vec{j})$

السّؤال 01

أ- حساب نهايات الدالة f عند أطراف مجال التعريف.

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} e^{2x}-(x+1)e^{x}$$
$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} e^{x}\left(e^{x}-(x+1)\right)$$
$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} e^{x}\left(e^{x}\right)$$
$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty(+\infty)$$
$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$$

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty} e^{2x}-(x+1)e^{x}$$
$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty} e^{2x}-xe^{x}-e^{x}$$
$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = 0$$

السّؤال 02

أ- أحسب f' الدالة المشتقة للدالة f:

لدينا: $f(x)=e^{2x}-(x+1)e^{x}$

و منه :

$$f'(x)=e^{2x}-(x+1)e^{x}$$
$$f'(x)=2e^{2x}-\left[1\times e^{x}+e^{x}\times(x+1)\right]$$
$$f'(x)=2e^{2x}-e^{x}-e^{x}(x+1)$$
$$f'(x)=2e^{2x}-e^{x}-xe^{x}-e^{x}$$
$$f'(x)=2e^{2x}-2e^{x}-xe^{x}$$
$$f'(x)=e^{x}\left(2e^{x}-x-2\right)$$
$$f'(x)=e^{x}.g(x)$$

ب- استنتج أنّ إشارة f' هي من إشارة g.

نلاحظ أنّ إشارة الدالة f' هي من إشارة الدالة g . لأنّ $e^{x}>0$

جـ- دراسة تغيرات الدالة f

بما أنّ إشارة f' هي من إشارة الدّالة g فإنّ: جدول تغيّرات الدّالة f يكون كما يلي :

x	$-\infty$		α		0		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$	0	↗	$f(\alpha)$	↘	$f(0)$	↗	$+\infty$

السّؤال 03

أ- بين أنّ $f(\alpha)=-\dfrac{\alpha^2+2\alpha}{4}$ ثمّ استنتج حصر ا لـ: $f(\alpha)$.

لدينا: $f(x)=e^{2x}-(x+1)e^x$

و منه: $f(\alpha)=e^{2\alpha}-(\alpha+1)e^{\alpha}$

نعلم أنّ: $e^{2\alpha}=(e^{\alpha})^2$ و منه يمكن أن نكتب عبارة f كما يلي: $f(\alpha)=(e^{\alpha})^2-(\alpha+1)e^{\alpha}$

و لدينا: حسب ما سبق : $g(\alpha)=0$ أي $2e^{\alpha}-\alpha-2=0$ و منه : $e^{\alpha}=\dfrac{\alpha+2}{2}$

نُعوّض e^{α} في الدالة f

إذن:

$$f(\alpha)=\left(\frac{\alpha+2}{2}\right)^2-(\alpha+1)\left(\frac{\alpha+2}{2}\right)$$

$$f(\alpha)=\left(\frac{\alpha+2}{2}\right)\left[\left(\frac{\alpha+2}{2}\right)-(\alpha+1)\right]$$

$$f(\alpha)=\left(\frac{\alpha+2}{2}\right)\left[\frac{\alpha+2}{2}-\frac{2\alpha+2}{2}\right]$$

$$f(\alpha)=\left(\frac{\alpha+2}{2}\right)\left[\frac{\alpha+2-2\alpha-2}{2}\right]$$

$$f(\alpha)=\left(\frac{\alpha+2}{2}\right)\left[\frac{-\alpha}{2}\right]$$

$$f(\alpha)=\left(\frac{\alpha+2}{2}\right)\left[\frac{-\alpha}{2}\right]$$

$$f(\alpha)=-\left(\frac{\alpha^2+\alpha}{4}\right)$$

• حصر العدد $f(\alpha)$

لدينا:

$$-1.6 \le \alpha \le -1.5$$

$$-3.2 \le 2\alpha \le -3;\ldots\ldots(1)$$

$$(-1.5)^2 \le \alpha^2 \le (-1.6)^2\ ;\ldots\ldots(2)$$

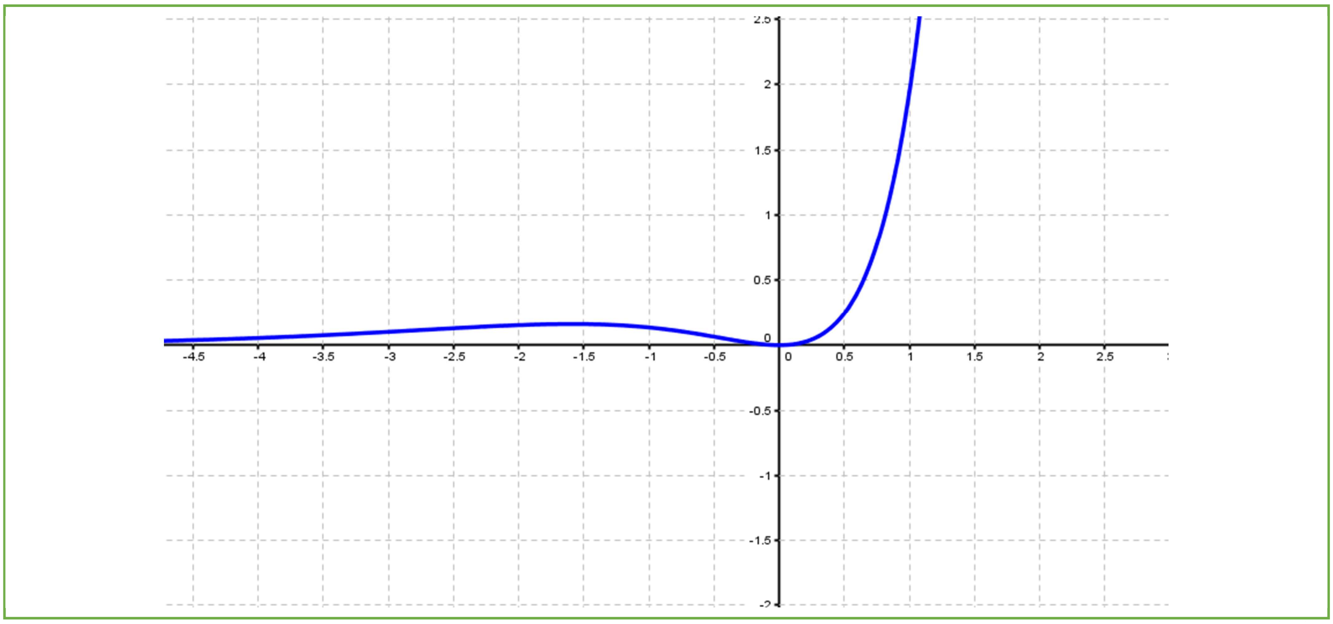
$$-3.2+(-1.5)^2 \le \alpha^2+2\alpha \le -3+(-1.6)^2$$

$$\frac{-3.2+(-1.5)^2}{4} \le \frac{\alpha^2+\alpha}{4} \le \frac{-3+(-1.6)^2}{4}$$

$$-\left(\frac{-3+(-1.6)^2}{4}\right) \le -\left(\frac{\alpha^2+\alpha}{4}\right) \le -\left(\frac{-3.2+(-1.5)^2}{4}\right)$$

$$0.11 \le f\ (x) \le 0.24$$

ب- أنشاء (c_f) :



الجزء الـــرّابع:

لدينا: m عدد حقيقي ســـالب.

السّؤال 03

أـ التفسير الهندسي للتكامل I حيث: $I=\int_m^0 f(x)dx$.

يمثّل التكامل I مساحة الحيّز المحدّد بـ:

- المنحنى (c_f).
- المستقيم $x=m$ و المستقيم $x=0$.
- محور الفواصل.

ب ـ باستخدام التكامل بالتجزئة, نحسب $\int_m^0 xe^x dx$.

نضع:

$u(x)=x$ و منه $u'(x)=1$

$v'(x)=e^x$ و منه $v(x)=e^x$

باستعمال التكامل بالتجزئة يصبح:

$$\int_m^0 xe^x dx=\left[xe^x\right]_m^0-\int_m^0 e^x dx$$

$$\int_m^0 xe^x dx=\left[0e^0-me^m\right]_m^0-\left[e^x\right]_m^0$$

$$\int_m^0 xe^x dx=\left[0e^0-me^m\right]-\left[e^0-e^m\right]$$

$$\int_m^0 xe^x dx=\left[-me^m\right]-\left[1-e^m\right]$$

$$\int_m^0 xe^x dx=-me^m-1+e^m$$

ج- حساب I.

نضع : $J=\int_m^0 xe^x dx=-me^m-1+e^m$

لدينا : $I=\int_m^0 f(x)dx$. و $f(x)=e^{2x}-(x+1)e^x$

و منه :

$$.I=\int_m^0\left(e^{2x}-(x+1)e^x\right)dx$$

$$.I=\int_m^0\left(e^{2x}-xe^x-e^x\right)dx$$

$$.I=\left[\frac{1}{2}e^{2x}\right]_m^0-J-\left[e^x\right]_m^0$$

$$.I=\left[\frac{1}{2}e^0-\frac{1}{2}e^{2m}\right]_m^0-J-\left[e^0-e^m\right]_m^0$$

$$.I=\left[\frac{1}{2}-\frac{1}{2}e^{2m}\right]-\left[-me^m-1+e^m\right]-\left[1-e^m\right]_m^0$$

$$.I=\frac{1}{2}-\frac{1}{2}e^{2m}+me^m+1-e^m-1+e^m$$

$$.I=-\frac{1}{2}e^{2m}+me^m+\frac{1}{2}$$

د- حساب نهاية I لـمّا يؤول m الى $-\infty$.

$$\lim_{m\to-\infty} I=\lim_{m\to-\infty}-\frac{1}{2}\overset{0}{e^{2m}}+\overset{0}{me^m}+\frac{1}{2}$$

$$\lim_{m\to-\infty} I=\frac{1}{2}$$

و منه: $\lim_{m\to-\infty} I=\frac{1}{2}$

إنتهى بحمد الله و فضله
تصحيح البكالوريا التجريبى –الموضوع الثّـاني –في مـــــادّة: الرّياضيات
لسنوات الثّـالثة علوم تجريبيـة بثانوية: الشّهيد مُحَمّد بوسبسي بالأغواط
راجين من المولى عزّ وَ جلّ أن يجعل ثوابه في ميزان حسنات الوالدين
آمين